一.导数与函数性质

1.已知函数，，，，这四个函数的部分图象如图所示，则函数，，，对应的图象依次是（    ）．



A．①③②④ B．③②①④ C．①④③② D．③④①②

【答案】A

【详解】，

当时，当时恒成立，则在上单调递减；

当时，

当时，，当时，，

则在上单调递增，在单调递减；

故对应得图象为①；

，

当时，当时恒成立，则在上单调递减；

当时，，

当时，，当时，，

则在上单调递增，在单调递减；

故对应得图象为③；

的定义域为R，且，

∴为偶函数，故对应得图象为②；

的定义域为R，且，

∴为奇函数，故对应得图象为④；

故选：A.

2．设函数，不等式对恒成立，则实数*a*的最大值为（    ）

A． B．1 C． D．0

【答案】D

【分析】先由定义证为奇函数，结合均值不等式可证，得在**R**上单调递增，故结合奇偶性与单调性，恒成立转化为对恒成立．

令，用导数法求最小值，即有.

【详解】因为，所以，所以为**R**上的奇函数．

因为，所以在**R**上单调递增．

不等式可转化为，

所以，即对恒成立．

令，则，

令，则．

当时，，在上单调递增；当时，，在上单调递减．

所以，即，

所以，且当时，取最小值0，

故，即实数*a*的最大值为0．

故选：D.

【点睛】1.通常函数不等式恒成立问题涉及奇偶性与单调性可先进行转化；

2.含参不等式恒成立问题，一般通过构造函数解决.

一般将参数分离出来，构造函数用导数法讨论不含参数部分的最值；或者包含参数一起构造函数，用导数法对参数分类讨论.

当参数不能分离出来时，也可尝试将不等式左右变形成一致形式，即可将该形式构造成函数，通过导数法分析单调性，将问题等价成对应自变量的不等式.

二．恒成立与能成立

3．已知函数，若在定义域内为单调递减函数，则实数的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；若，，使得成立，则实数的取值范围为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】          

【分析】空1：根据题意可得当时恒成立，即，利用基本不等式处理求解；

空2：根据题意可得，借助于导数求解最值，同时注意讨论和．

【详解】，则

∵在定义域内为单调递减函数，则当时恒成立

则可得：

∵，当且仅当时等号成立，则∴，即实数的最小值为；

∵，即

当时，整理得：

构建，则

∵当时，

则当时恒成立

∴在上单调递减，则

则，即

当时，，即在时不满足原式

综上所述：实数的取值范围为

故答案为：；．

4．已知函数，.

(1)，讨论函数的极值点；

(2)，设，当时，不等式恒成立，求*a*的取值范围.

【答案】(1)答案见解析(2)

【分析】（1）讨论，两种情况，利用导数得出单调性，进而得出极值点；

（2）由得出恒成立，令，由得出，构造函数，由导数得出，从而得出*a*的取值范围.

（1）

∵，.

当即时，，单调递增，无极值点.

当即时，，当时，单调递减，

当时，单调递增，∴极小值点，无极大值点.

综上，当时，无极值点；

当时，为极小值点，无极大值点.

（2）

，，.

不等式恒成立，即恒成立，即恒成立.

，，∴，令，，则在上单调递增，

则需，只需，即，∴.

令，，易知在单调递增，在单调递减，

∴.综上，.

【点睛】关键点睛：在求的取值范围时，关键是分离参数，得出，再构造函数，由其最值得出的取值范围.

三．导数与三角函数

5．已知函数.

(1)求在区间上的最大值和最小值；

(2)设，若当时，，求实数*a*的取值范围.

【答案】(1)最大值为，最小值为(2)

【分析】（1）对函数求导，利用导数在函数最值中的应用，即可求出结果；

（2）对函数求导，分和，两种情况研究函数的单调性，利用函数的单调性求出的最大值，再结合，即可求出结果.

【详解】（1）解：由条件得，

当时，有，，，所以，即在上单调递减，

因此在区间上的最大值为，最小值为.

（2）解：由题意得，所以，

若，当时，有，

所以在上单调递增，所以，符合题意.

若，令，则，

当时，，所以在上单调递减.

又因为，，所以在上存在一个零点，

当时，，即，所以单调递减，此时，不符合题意.

综上可知，*a*的取值范围是.

四．导数与情景问题

6．用数学的眼光看世界就能发现很多数学之“美”.现代建筑讲究线条感，曲线之美让人称奇.衡量曲线弯曲程度的重要指标是曲率，曲线的曲率定义如下：若是的导函数，是的导函数，则曲线在点处的曲率.



(1)若曲线与在处的曲率分别为，，比较，大小；

(2)求正弦曲线（）曲率的平方的最大值.

【答案】(1)；(2)1.

【分析】（1）对、求导，应用曲率公式求出处的曲率，，即可比较大小；

（2）由题设求出的曲率平方，利用导数求的最大值即可.

（1）由，，则，

由，，则，

所以；

（2）由，，则，

，令，则，故，

设，则，在时，递减，

所以，最大值为1.

五．导数与方程

7．已知函数，．

(1)当时，求在处的切线方程；

(2)若有两个极值点，且．

①求实数的取值范围；

②求证：．

【答案】(1)(2)①；②证明见解析.

【分析】（1）根据条件，求出，，根据利用导数的几何意义，即可得解；

（2）①利用导数分析函数的单调性，根据函数有个极值点可得出关于实数的不等式组，由此可解得实数的取值范围；

②分析可知，，将所证不等式转化为，分、两种情况讨论，在时，利用不等式的基本性质可证得结论成立；利用，，要证，只需证，构造，并利用导数分析函数的单调性，可证得.

【详解】（1）解：当时，，该函数的定义域为，

则，所以，，，

此时，曲线在处的切线方程为，即.

（2）解：①，

令，，则，

令，则对任意的恒成立，

所以，函数在上单调递增，

因为，当时，，此时函数单调递减，

当时，，此时函数单调递增，

所以，函数在上单调递减，在上单调递增，

因为函数有两个极值点，所以，，解得，

此时，

所以，函数在、上各有一个极值点，合乎题意；所以的取值范围为．

②由于的两根为，

所以，由①知

要证，只需证，即证：

令，则

令，则.

当时，，此时函数单调递增，所以，，即.

所以

又，在上单调递增

所以，所以在上单调递增，

可得，因为，故得证，

即.

【点睛】方法点睛：利用导数证明不等式问题，方法如下：

（1）直接构造函数法：证明不等式（或）转化为证明（或），进而构造辅助函数；

（2）适当放缩构造法：一是根据已知条件适当放缩；二是利用常见放缩结论；

（3）构造“形似”函数，稍作变形再构造，对原不等式同解变形，根据相似结构构造辅助函数.

8．已知函数（是自然对数的底数）.

(1)若，求曲线在点处的切线方程；

(2)若函数有3个极值点，，

（i）求实数*m*的取值范围；

（ii）证明：.

【答案】(1)；(2)（i）；（ii）证明见解析.

【分析】（1）把代入，求出函数的导数，利用导数的几何意义求解作答.

（2）（i）根据给定条件可得有三个不同的解，构造函数，探讨其性质即可推理作答.

（ii）由（i）确定的取值或范围，并且有，两边取对数并换元，对不等式作等价变形，构造函数，利用导数推理作答.

【详解】（1）当时，，则，

求导得，有，于是得，

所以所求切线方程为：.

（2）（i）依题意，，因函数有3个极值点，即有三个不同的解，

由，得或，则有不等于-1的两个不同的解，

令，求导得，当时，，当时，，

于是函数在上是增函数，在上是减函数，则，

又当时，，且，当时，，因此方程有两解时，即，

所以实数*m*的取值范围是；

（ii）由（i）知，，，，，两边取自然对数得，

整理得，令，则且，，，

显然，等价于，，

令，，则，令，则，

从而得函数在上单调递增，则有，因此函数在上单调递增，总有，

所以不等式成立.